Jan Długosz University of Częstochowa
Scientific Issues, Mathematics XIII, Częstochowa 2008

UWAGI O PRZESZKODACH SEMANTYCZNYCH I SYNTAKTYCZNYCH

Jacek Jędrzejewski, Grażyna Rygał

Institute of Mathematics and Computer Science
Jan Długosz University of Częstochowa
al. Armii Krajowej 13/15, 42-200 Częstochowa, Poland
e-mail: j.jedrzejewski@ajd.czest.pl
e-mail: g.rygal@ajd.czest.pl

Abstract
In this paper we discuss several obstacles which, in our opinion, can cause pupils' problems in understanding both of mathematical texts and of mathematics. These obstacles are of a epistemological nature as well as of essential and semantic nature. All the examples of incorrect formulations are taken from Polish school and academic text-books. The goal of this article is to call the attention of authors which write mathematical texts to these problems in an attempt to avoid such mistakes.

Artykułem tym chcielibyśmy zwrócić uwagę na jedną z przeszkód, stanowiącą – naszym zdaniem – dość istotną przyczynę w powstawaniu trudności w rozumieniu tekstów matematycznych i, co za tym idzie, samej matematyki. Umieściliśmy w nim przykłady złych sformułowań, występujących na poziomie szkoły podstawowej, gimnazjum oraz szkoły ponadpodstawowej. Podane przykłady pochodzą z aktualnych podręczników szkolnych i akademickich. Matematyka posługuje się językiem potocznym (np. polskim, niemieckim, rosyjskim), stosując zasady i precyzję wymaganą przez dwuwartościową logikę. Niestety, język potoczny nie spełnia wszystkich kanonów ścisłości wypowiedzi matematycznej.

Oto, co pisze Jan Konior w [1]:

> *Typowy tekst matematyczny zawiera sformułowania ogólne i w szerokim zakresie operuje zmiennymi. Ponadto jest z reguły tekstem informującym – narzucającym gotowe stwierdzenia, zredagowanym na ogół według pewnego ukształtowanego wzorca raczej odbiegającego od schematów, pod które podpadają teksty języka potocznego.*

Tekst matematyczny, dla specjalistów[1] łatwy, jest jednocześnie bardzo trudny do zrozumienia dla większości ludzi. Wrażenie trudności potęguje niestaranny sposób redagowania tekstów matematycznych, stanowiąc istotną przeszkodę syntaktyczną w ich rozumieniu. Przedstawimy i omówimy kilka przykładów niewłaściwego formułowania tekstów matematycznych, ilustrujących możliwości powstawania trudności rozumienia znaczenia zagadnień matematycznych. Pisząc teksty matematyczne powinniśmy zachować (o ile to jest możliwe) potoczne rozumienie słów, nie zmieniając znaczenia słów używanych przez matematyków.

Teksty matematyczne są trudne, bardzo specyficzne i rządzą się swoimi prawami, jak czytamy w [1]:

> *Specyfika i autonomia języka występującego w matematycznym tekście nie sprowadzają się tylko do nowego słownictwa i symboliki, jak to się nieraz sądzi. ... Podkreśla się, że – podobnie jak na przykład chiński – język matematyki nie ma charakteru alfabetycznego; pojedyncze znaki są nazwami złożonych pojęć, całych konstrukcji, stosunków zachodzących jednocześnie między wieloma obiektami i znaczeniowo odpowiadają nie tylko pojedynczym wyrazom, lecz nieraz także całym grupom wyrazów w języku naturalnym (wypowiedzeniom). Jeśli się nie zapamiętało sposobu odczytywania typowego znaku matematycznego, to nie można go „przeliterować", jak na przykład wyrazu „tablica" w języku polskim.*

Czytanie tekstu matematycznego nie polega więc tylko na biernym odczytywaniu znaczenia słów, jest to proces o wiele bardziej złożony.

[1]Aktywny matematyk, pracujący w swojej wąskiej dziedzinie, jest specjalistą i posługuje się ideami głębokimi, z tego powodu absolutna precyzja wypowiedzi nie jest dla niego najbardziej istotna. Patrz [2].

Ze znaczenia poszczególnych słów, poprzecinanych symbolami matematycznymi, musimy odczytać sens całego zdania, a następnie sens całego ciągu zdań. Z tych powodów bardzo istotne jest, aby matematyczny tekst był napisany w możliwie najprostszy i najbardziej przystępny sposób.

W tekstach matematycznych przekazujemy czytelnikom jedynie słowa, pojęcia, jakie się pod tymi słowami kryją. Niezależnie czy są to definicje, twierdzenia, przykłady, czy też rozumowania (dowody lub rozwiązania zadań), są podane w sposób być może formalnie poprawny, ale nie oddający istotnego sensu matematyki. Zbigniew Semadeni w pracy [2] omawia formy powierzchniowe i idee głębokie. Tekst matematyczny odnosi się tylko do form powierzchniowych, idee głębokie uczeń musi wykształcić sobie sam. Dlatego bardzo ważne jest to, aby tekst, z którym uczeń musi pracować, był napisany najbardziej przystępnie i zarazem poprawnie.

Nie można też pomijać reguł gramatycznych rządzących językiem. Język polski jest bardzo wrażliwy na nieprecyzyjne formułowanie zdań. W potocznym języku różnie rozumiemy zwroty *młoda panna* i *panna młoda*. A różnica polega przecież tylko na zmianie szyku wyrazów. Matematycy bardzo często nie zwracają uwagi na ten problem. Znajdujemy wiele tekstów napisanych bez właściwej staranności, a czasem wręcz błędnie sformułowanych.

Jan Konior w swojej pracy *Budowa i lektura tekstu matematycznego* [1] zajmuje się trudnościami i rodzajami błędów popełnianych przez uczniów podczas czytania tekstów matematycznych. My chcielibyśmy zwrócić uwagę na przyczyny takich trudności, spowodowane przez niewłaściwe formułowanie tekstu matematycznego.

Omówimy tylko kilka przykładów takich błędnych sformułowań, prowadzących do syntaktycznych i semantycznych przeszkód w rozumieniu tekstów matematycznych.

- Zaczniemy od może nie najważniejszego problemu niemniej bardzo istotnego dla języka matematyki. Jest nim zwrot: *dokładnie jeden*. Ucząc matematyki czynimy wiele wysiłku w kształcenie poprawnego i precyzyjnego wyrażania swoich myśli przez uczniów. Matematycy nie powinni więc używać sformułowań typu: *dokładnie jeden*. Liczba jeden oznacza jeden, nie mniej i nie więcej. Wystarczy napisać **jeden**, a jeśli już tak bardzo chcemy podkreślić jednoznaczność – możemy napisać: **jedyny**.

Taka sama uwaga odnosi się do sformułowań: *trzy różne* lub *dwa różne*. Jeśli piszemy o różnych trzech elementach, to trzy elementy nie mogą być dwoma lub jednym. Staramy się wpoić uczniom, że matematyka posługuje się bardzo precyzyjnym językiem i wszystkie matematyczne teksty są (powinny być) jednoznaczne. A takie sformułowania sugerują, że trzy może nie być równe trzem. Nie powinniśmy więc pisać dokładnie jeden punkt lub dokładnie trzy liczby. Łamiemy w ten sposób zasadę semantycznej funkcji oznaczania i znaczenia.

Inną sprawą jest oznaczenie trzech liczb lub punktów. I tak w pewnych sytuacjach należy jednak napisać trzy różne liczby a, b, c. Ma to miejsce wtedy, gdy chcemy rozważyć trzy liczby, różne między sobą, i udowodnić jakąś własność ich dotyczącą, np. gdy należy udowodnić, że spośród trzech różnych liczb jedna z nich leży pomiędzy dwiema pozostałymi. Wtedy taki zapis jest uzasadniony. W innych przypadkach takie sformułowania są niewskazane.

Wręcz niedopuszczalne jest pisanie: *równanie ma dokładnie dwa różne pierwiastki*. Pierwiastkiem wielomianu (trójmianu kwadratowego) jest liczba; pisząc więc o dwóch pierwiastkach, mamy na uwadze, że dwie liczby są pierwiastkami, czyli zbiór pierwiastków jest dwuelementowy. Nie ma potrzeby dopisywać *dwa różne pierwiastki*.

Często znajdujemy sformułowanie: *równanie* $x^2 - 2x + 1 = 0$ *ma dwa pierwiastki* $x_1 = 1$ *i* $x_2 = 1$. Jednym z powodów jest właśnie błąd semantyczny, polegający na użyciu słowa „dwa", drugim i to poważniejszym – gdyż jest błędem merytorycznym – jest nierozróżnianie krotności pierwiastka od samego pierwiastka wielomianu.[2] Możemy napisać: **równanie** $x^2 - 2x + 1 = 0$ **ma jeden pierwiastek; jest nim liczba 1**. Fakt, że krotność pierwiastka jest równa 2, nie oznacza, iż zmienia się liczba pierwiastków. Liczbą pierwiastków jest przecież moc zbioru tychże. Nie wiadomo dlaczego niektórzy nauczyciele zmieniają znaczenie słów, wprowadzając zamieszanie i zmuszając uczniów do swoistej matematycznej schizofrenii. W tym przypadku możemy też doszukiwać się przeszkody epistemologicznej.

[2] W artykule nie analizujemy tego typu błędów, więc zainteresowanego Czytelnika odsyłamy do jakiegokolwiek podręcznika algebry. Napotykamy tu na przeszkodę epistemologiczną, spowodowaną całkiem innymi przyczynami.

- W bardzo wielu tekstach spotykamy następujące sformułowania:
w punktach $x = 1$ *i* $x = -1$.
Przecież nie ma takiego x, który byłby równy 1 i -1! Punktami (nas interesującymi) są **liczby 1 i -1**. Nadmiar symboli jest szkodliwy i prowadzi do błędów.

- Wielokrotnie znajdujemy następujące błędy:
obliczamy wyróżnik: $\Delta = b^2 - 4ac = ... = 25$, $\Delta > 0$, *zatem*
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad lub \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
i tak dalej.
Korzystamy tu ze wzorów, określających pierwiastki równania kwadratowego, oznaczając jeden z nich jako x_1 drugi zaś jako x_2. Nie oznacza to jednak, że tak otrzymane wartości pierwiastków są różne. Wtedy zasadne jest stwierdzenie, że pierwiastki x_1 i x_2 są różne.

- Pojawia się tu jeszcze jedna sprawa związana z powyższymi przykładami. Chodzi nam tu o wymienianie wszystkich elementów jakiegoś zbioru. Często spotykaliśmy sformułowania: *elementami zbioru E są liczby* 1 *lub* 2, zamiast **elementami zbioru E są liczby** 1 **lub** 2. Tu wymieniamy wszystkie elementy zbioru, zatem wymieniając te elementy **musimy zastosować** formę **„i”**, gdyż wymieniamy elementy zbioru.

  Wyobraźmy sobie bowiem, że pani Ewa z panem Adamem ma dzieci: Jasia, Małgosię.
Odpowiadając na pytanie „Kto jest dzieckiem pani Ewy?” napiszemy: Dziećmi pani Ewy są Jaś **i** Małgosia. A niech teraz ktoś o to samo zapyta pana Adama. Czy odpowiedzią może być: Jaś **lub** Małgosia? !!!

  Jak widać, pisząc spójniki *i* oraz *lub* musimy bardzo uważać czy są one spójnikami logicznymi, czy spójnikami języka potocznego, służącymi do wymieniania elementów jakiegoś zbioru.

- W obecnie używanych podręcznikach do matematyki, geometria jest przedstawiana w wersji mnogościowej. Odcinek, kąt i inne figury geometryczne traktowane są jako pewne podzbiory płaszczyzny. Tymczasem...

W sformułowaniu: *Dany jest trójkąt równoboczny o boku* 3 są dwa błędy. Jeden błąd jest mniej poważny, drugi istotny. Ten pierwszy błąd, to *Dany jest trójkąt...* Przecież trójkąt jest figurą geometryczną, jest więc tworem abstrakcyjnym. Jak więc może być dany? Komu i gdzie? A w ogóle w jaki sposób??? Można przecież napisać: **Bok trójkąta równobocznego ma długość 3**.

I tak dochodzimy do drugiego z tych błędów wspomnianych wyżej: *... o boku* 3. Bok jest pewnym odcinkiem, jest więc figurą geometryczną i nie może być liczbą. Liczba 3 oznacza tu długość odpowiedniego odcinka, ale nie może być nim samym! Mamy więc do czynienia z myleniem odcinka z jego długością.

Podobnym błędem jest mylenie kąta z jego miarą. Czytamy bardzo często: *kąt* 30°. Stopnie wprowadziliśmy właśnie po to, aby mierzyć nimi kąty, które definiowane są powszechnie jako figury geometryczne. Te zaś są podzbiorami płaszczyzny lub przestrzeni. Nie można zatem identyfikować ich z ich miarami. Powinno się napisać **kąt mający miarę** 30°.

- Powszechnie znajdujemy sformułowania typu: *odcinek długości*. To przecież odcinek ma długość, a nie długość ma odcinek. Chodzi nam tu o odcinek, którego długość jest znana. Podmiotem w tej wypowiedzi jest *odcinek* a *długość* jest przydawką. Sformułowanie takie jest gramatycznie błędne. Powinniśmy więc pisać **odcinek, mający długość** lub **odcinek o długości**, ewentualnie **długość odcinka**.

  Tak samo gramatycznie niepoprawne są bardzo często stosowane zwroty np.: *funkcja postaci* czy też *równanie postaci*. *Równanie postaci* — można mówić o równaniu prostej, okręgu lub np. innej figury geometrycznej. Przecież nie chodzi nam tu o równanie opisujące kształt jakiejś postaci. To nie postać ma równanie, a odwrotnie. Powinno więc być: **równanie, mające postać...**

  Z tej samej serii — nagminnie stosowany jest zapis: *liczba postaci*. Oczywiście nie chodzi tu o liczbę osób tam występujących. Zamysłem autora jest: **liczba, mająca postać jakąś tam**. W podręcznikach szkolnych należy używać słów i zwrotów potocznych w ich właściwych znaczeniach.

A tak w ogóle, czy liczba sama nie wystarcza? Najczęściej chodzi o liczbę zapisaną w niejawnej formie. Na przykład znajdujemy sformułowanie: *liczba postaci* $a = 5^n - 5$, *dla* $n \in \mathbb{N}$. Znajduje się tu kilka błędnych zapisów, ale o tym później. W tym przypadku poprawnie możemy napisać: **liczba** $5^n - 5$, **gdzie** $n \in \mathbb{N}$ lub jeszcze lepiej: **liczba** $5^n - 5$, **gdzie** n **jest jakąś liczbą naturalną**.

Drugim błędem, występującym w powyższym przykładzie, jest wplatanie symboliki matematycznej w tekst słowny. Od biedy można przyjąć tę manierę, ale tylko wtedy, gdy symbole słowne są dostosowane do gramatyki zdania. W powyższym przykładzie mamy: *Liczba* $5^n - 5$ *jest podzielna przez* 5 *dla* $n \in \mathbb{N}$. Przeczytajmy ten tekst, zgodnie z jego zapisem symbolicznym: LICZBA $5^n - 5$ JEST PODZIELNA PRZEZ 5 DLA n JEST ELEMENTEM ZBIORU $\mathbb{N}$.

- W wielu miejscach pojawiają się niepotrzebne litery. Na przykład: *...w skali* $k = 2$. Skala jest liczbą i należy formułować te zdania następująco: **w skali** 2. Taki sposób formułowania bardzo wielu zdań wprowadza niepotrzebny szum informacyjny. To tak jakby nigdy skali nie można było oznaczyć inną literą.

  Taki sposób formułowania występuje w niezliczonej liczbie tekstów matematycznych.

  Niewłaściwe są też sformułowania, gdzie znajdujemy np.: *mnożymy przez liczbę* $k \neq 0$. Zapis $k \neq 0$ nie oznacza liczby. Zapis ten określa pewną relację, mianowicie: relację, określającą, że k jest liczbą różną od zera. Pomijając wtrącanie symboli matematycznych w tekst słowny, co nie powinno się zdarzać, to dodatkowo zapis taki jest obarczony błędem. A przecież to zdanie można sformułować: **... przez liczbę** k **różną od zera...**

  Często spotykany jest sposób zapisu: *Liczby* $b = 2$ *i* $c = -1$ *są...* Liczbami są tu 2 oraz -1. Zapis $b = 2$ i $c = -1$ jest koniunkcją dwóch równości (relacji, form zdaniowych). Występują tu tak jak poprzednio dwa błędy: pomieszanie tekstu słownego z symbolami matematycznymi i nazwanie relacji liczbą.

- Nieraz czytamy: *wartość wielomianu dla* $x = 3$. Tu również mieszają się błędy semantyczno-syntaktyczne z błędami epistemologicznymi. Wielomiany definiujemy w szkole jako funkcje.

Zmienna x występuje tu w definicji wielomianu, zatem owo x nie może wystąpić w innej postaci. Sformułowanie $x = 3$ jest więc tu formą zdaniową.

Można jednak dość łatwo usunąć ten rodzaj błędu: **Oblicz wartość wielomianu** $W(x)$, **gdy** $x = 3$ lub: **Oblicz wartość wielomianu** $W(x)$ **dla argumentu** 3.

W wielu tekstach występują sformułowania np.: *promieniem okręgu jest liczba* $r = 2$... Przecież promieniem (czyli liczbą), o której mowa, jest 2, nie wiadomo po co, chyba tylko dla utrudnienia zrozumienia tekstu jest wprowadzony symbol r. Jest on nie tylko zbędnym szumem informacyjnym, ale zapis jest błędny z punktu widzenia logiki. Mianowicie, $r = 2$ jest relacją, nie liczbą.

Podobne błędy znajdują się w wielu zagadnieniach związanych z wielomianami. I tak, wielu autorów podręczników stosuje sformułowanie: *Sprawdź, czy liczba* $x = 2$ *jest pierwiastkiem wielomianu* $\phi(x)$. Znowu mamy tu do czynienia z dwoma błędami. Pierwszym jest: $x = 2$ nie jest zapisem liczby, lecz relacją, a drugim: pierwiastkiem jest liczba $x = 2$! A liczbą tą jest 2.

Powinno więc być: **Sprawdź, czy liczba** 2 **jest pierwiastkiem wielomianu.**

Można (szczególnie w młodszych klasach) sformułować zadanie np. tak: Znajdź liczbę x spełniającą zależność $x^2 - 4 = 0$. Wtedy odpowiedź $x = 2$ jest właściwa, ale nie jest to prawidłowa odpowiedź na poprzednie pytanie.

Wprowadzanie w omawianych wyżej zapisach symbolu literowego r czy też x jest zbędnym i niepotrzebnym szumem informacyjnym, utrudniającym zrozumienie istoty zagadnienia.

- Mówiąc o promieniu okręgu, pojawia się niekonsekwentne stosowanie pojęcia: promień. Promieniem okręgu jest liczba dodatnia, natomiast często znajdujemy sformułowanie: *długość promienia okręgu jest równa* 1. Owszem, w wielu przypadkach definiujemy promień jako którykolwiek z odcinków, łączących środek okręgu z punktem na okręgu, ale jest to pojęcie wtórne. W definicji okręgu promień jest liczbą dodatnią, jest więc to pojęcie wcześniej występujące, niż promień traktowany jako odcinek. Wystarczy więc pisać: **promień okręgu jest równy 1**.

- Równość, nierówność i inne tego typu zwroty często też prowadzą do nieporozumień. Równość (nierówność, porządek itp.) jest relacją, może więc być spełniona przez jakiś element (jakieś elementy). Powinno się pisać: **relacja jest spełniona**, ale nie: *relacja zachodzi*. Niby dokąd miałaby zachodzić?

  Często spotykamy również sformułowanie: *zachodzi równość, lub np. twierdzenie*. Równość jest pewną relacją. **Równość może być spełniona. Twierdzenie może być prawdziwe.** Natomiast „zachodzi" jest żargonem stosowanym, niestety, przez wielu matematyków. Równość może być spełniona lub nie, ale nie wolno pisać: *równość prawdziwa*.

  Jeszcze gorzej brzmi tylko *równość fałszywa.*

  Bardzo często słyszymy, że *twierdzenie zachodzi*. Twierdzenie matematyczne jest zdaniem, może więc być prawdziwe (lub nie, ale wtedy nie nazywa się twierdzeniem).

  Bardzo ważna uwaga!!! Twierdzenie jest zdaniem (prawdziwym) udowodnionym w danej teorii. Nie wolno zatem pisać *twierdzenie prawdziwe* ani tym bardziej *twierdzenie fałszywe.* Możemy mówić o implikacjach: prostej, odwrotnej, przeciwnej i przeciwstawnej, ale nie o twierdzeniach, w sytuacji, gdy pytamy o ich prawdziwość!!!

- Znajdujemy też niewłaściwe sformułowania typu *Odległość w układzie współrzędnych.* Odległość odnosi się do płaszczyzny, wyposażonej w układ współrzędnych. Takie niewłaściwe sformułowania pojawiają się w wielu tekstach. Powinno się pisać: **Odległość na płaszczyźnie z układem współrzędnych.**

  Podobnie, wielokrotnie autorzy piszą: *Narysuj w układzie współrzędnych...* Otóż uczniowie mają coś tam narysować, ale **na płaszczyźnie z układem współrzędnych** i tak należy to formułować.

- Często znajdujemy:
  ... obrazem punktu $P = (x, y)$ *jest taki punkt* $P' = (x', y')$*, że ...*
  W tym sformułowaniu mamy dwie sprawy zapisane w jednym wierszu. Otóż, wybieramy punkt P, a następnie ustalamy (nazywamy) jego współrzędne. Tak samo postępujemy z punktem P'.

  Jest to błąd, który można nazwać „dwa w jednym".

Powinno się pisać: **... obrazem punktu P o współrzędnych (x, y) jest punkt P', mający współrzędne (x', y') takie, że ...**

Podobnie, znajdujemy: *o wierzchołku w punkcie* $W = (0, 0)$... Wierzchołek paraboli jest punktem, należy więc zapisać **o wierzchołku** W. A w ogóle, to po co jest tu litera W? Wierzchołkiem jest przecież punkt $(0, 0)$.

- Normą stosowaną w tekstach matematycznych (i innych) jest zasada wystawiania wzorów poza tekst słowny. Tymczasem reguła ta jest nagminnie łamana przez autorów.

  Bywa więc tak: ... *dla pewnych liczb całkowitych* a *i* $b \neq 0$. Tak w podręcznikach nie należy pisać. Często stosują ten styl matematycy w czasie wykładów, ale nie powinno to występować w podręcznikach szkolnych. Należy napisać: **Liczbę x nazywamy liczbą wymierną, gdy $x = \frac{a}{b}$, dla pewnych liczb całkowitych a i b, gdzie $b \neq 0$.**

- W wielu tekstach autorzy piszą np. tak:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad \text{dla} \quad a \geq 0 \quad \text{i} \quad b \geq 0.$$

  Zamiast słowa „dla” powinno być słowo „gdy”. Znacznie lepiej ono tu pasuje, nie szkodzi poprawności gramatycznej całego zdania i zdanie staje się zdaniem warunkowym, gdzie słowem **gdy** połączone są pewne warunki.

  Gorzej, gdy znajdujemy:

$$|x-1| + |x| + |x-2| \quad \text{dla} \quad 0 < x < 1.$$

  Czy coś tam ma być spełnione dla zera? Nie, szukamy najprostszej postaci wyrażenia zapisanego powyżej dla elementów x, należących do przedziału $(0, 1)$. Zatem, można ten wiersz zapisać następująco:

$$|x-1| + |x| + |x-2|, \quad \textbf{gdy} \quad 0 < x < 1.$$

  Wtedy wszystko jest zrozumiałe i poprawne tak pod względem logiki, jak i gramatyki języka polskiego.

Podobnie, znajdujemy bardzo często np. taki zapis:
Każdej liczbie naturalnej $1 \leq n \leq 10$ przyporządkujmy...
Oczywiście, kwantyfikator „dla każdego” (tu: każdej) odnosi się tu do liczby n a nie do liczby 1, ale to właśnie należy zapisać poprawnie: **Każdej liczbie naturalnej** n**, spełniającej nierówność podwójną** $1 \leq n \leq 10$,...

- Bywa też: ... o wskaźniku $n > M$ należy do otoczenia liczby $U\left(0, \frac{1}{2}\right)$.
  W zdaniu tym są dwa błędy zapisu.
  Zapis $n > M$ nie oznacza wskaźnika!
  Zapis $U\left(0, \frac{1}{2}\right)$ nie oznacza liczby!

  Powinno być: **... o wskaźniku** n**, większym niż** M**, należał do otoczenia** $U\left(0, \frac{1}{2}\right)$ **liczby** 0.

- Nieraz czytamy: *miejsce zerowe* $x = 0$. Wiersz dalej: *... prosta o równaniu* $x = 0$.

  W drugim miejscu zapis jest poprawny; w pierwszym zapis jest nieprecyzyjny, należy go unikać, a dodatkowo w zestawieniu z drugim zapisem wprowadza czytelnika w błąd.

  Przypomnijmy: Miejscem zerowym funkcji (liczbowej)[3] f nazywamy argument funkcji f, dla którego wartość funkcji f jest równa 0 lub:
  Miejscem zerowym funkcji f nazywamy argument x_0 funkcji f taki, że $f(x_0) = 0$.

  Miejscem zerowym jest argument funkcji, w tym przypadku liczba. Zapis $x = 0$ nie wskazuje na liczbę, można odczytać go jako równanie. ALE NIE LICZBĘ.

- Znajdujemy: *Funkcja sinus rośnie w przedziałach*

$$\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

itd. Otóż funkcja sinus jest rosnąca w każdym przedziale, mającym taką postać, ale

[3] O innych – tzn. nieliczbowych – w tym miejscu nie można mówić, więc i to dodatkowe określenie można by opuścić.

nie jest rosnąca w sumie tych przedziałów, co może sugerować zapis w podręczniku.

Funkcja bywa rosnąca lub malejąca w zbiorze lub przedziale. Nie wolno więc pisać: *funkcja jest malejąca dla* $x \in (2; 4)$. Należy stosować zapis: **funkcja jest malejąca w przedziale** $(2; 4)$.

- Zapis $1 < x \geq 2$ nie jest oznaczeniem zbioru!!! Poza tym nie wolno pisać czegoś takiego!!! Jeśli już autorom chodzi o zbiór tych elementów x, dla których spełnione są warunki podobne do tego z punktu a), to należy napisać: **Zaznacz na osi liczbowej (jeśli to możliwe) zbiory tych elementów x, które spełniają warunek:**

$$1 < x \quad \text{i} \quad x \geq 2.$$

- Bardzo ważne!!! (Często popełniany przez nauczycieli błąd). Jest: Jeżeli zastąpimy warunek $x > -1$ przedziałem $(-1, \infty)$...

  Warunek nie może być zastąpiony niczym innym jak też warunkiem. Przedział jest obiektem całkiem innego rodzaju. Nie wolno ich mylić.

  Autorom takich tekstów mylą się znaczenia odpowiednich symboli, nie widzą w takich zapisach różnicy w odpowiednich oznaczeniach. Semantyczna funkcja oznaczania wskazuje na stosunek nazwy do zbioru jej desygnatów i to właśnie umyka uwadze autorów takich sformułowań.

- Trafiają się również i takie zdania: *Funkcja f ma minimum w punkcie $x = 2$ i $f(2) = 5$.* Powinno być: **... ma w punkcie** 2 **oraz** $f(2) = 5$. Podobnie, czytamy: *dla $x = -1$ przyjmuje wartość $f(-1) = -2$.* Powinno być: **dla argumentu** -1 **przyjmuje wartość** -2.

- Zgodnie z zasadami formułowania definicji matematycznych składają się one zazwyczaj z dwóch części; części definiowanej i części definiującej. Definicje takie powinny mieć kształt: *obiekt ... nazywamy ... (takim), jeśli spełnia następujące warunki...(jakieś tam).* W tych zasadach tkwi już, że każdy obiekt, spełniający odpowiednie warunki, jest nazywany takim jak trzeba. Nie ma więc potrzeby używania za każdym razem słowa „każdy” w każdej definicji. To się samo przez się rozumie. Jednakże nadużywanie słowa „każdy” może czasami prowadzić do nieporozumień.

Tak więc definicja miejsca zerowego powinna brzmieć następująco:
Miejscem zerowym funkcji liczbowej f nazywamy argument funkcji f, dla którego wartość funkcji f jest równa 0.

Inaczej nieco:
Miejscem zerowym funkcji liczbowej f nazywamy argument x_0 funkcji f taki, że $f(x_0) = 0$.

Kończąc spis przykładów nagminnie popełnianych błędów, chcielibyśmy dodać, że czasami trudno się dziwić, iż wielu czytelników naszych tekstów nie rozumie matematyki. Piszemy bowiem coś całkiem innego, niż chcielibyśmy wyrazić, a przede wszystkim inaczej niż chcemy, aby czytelnicy (nie)rozumieli.

Zgodnie z zasadami semantyki, znaki słowne (wyrazy, symbole, wzory matematyczne) pełnią w danym języku m.in. funkcje oznaczania, znaczenia, wyrażania, symbolizowania, reprezentowania itp. Język matematyczny bardzo powiększa liczbę stosowanych znaków w stosunku do alfabetu języka polskiego, muszą one jednak podlegać ogólnym regułom tworzenia zrozumiałych wypowiedzi.

Czytanie tekstu matematycznego jest procesem wielowymiarowym, polega na odczytywaniu słów i zdań języka potocznego, zrozumienia znaczenia symboli matematycznych, połączenia tych wszystkich elementów i zrozumienia całego tekstu. Zbigniew Semadeni w pracy [2] wyróżnia idee głębokie, formy powierzchniowe i modele formalne, podkreślając, że matematyk pracuje, mając bardzo dobrze przyswojone idee głębokie i na nich prowadzi swoje rozumowania. Uczniowie, czytający teksty matematyczne, bardzo rzadko mają opanowane formy głębokie, najczęściej posługują się w swych rozumowaniach nie dość głęboką wiedzą; używają raczej form powierzchniowych. Powinniśmy więc, w miarę możliwości, uprzystępniać nasze teksty, gdyż w nich jak niemal w żadnych innych, sens wypowiedzi jest niezrozumiały w sytuacji braku zrozumienia nawet małego fragmentu tekstu. Bądźmy więc autorami tekstów matematycznych na tyle przystępnych, na ile jest to możliwe. A możemy w tym względzie wiele dobrego uczynić.

References

[1] J. Konior. *Budowa i lektura tekstu matematycznego*. Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 1998.

[2] Z. Semadeni. Trojaka natura matematyki: Idee głębokie, formy powierzchniowe, modele formalne. *Dydaktyka Matematyki* **24**, 41-92, 2002.

[3] Z. Semadeni. Utożsamianie pojęć, redukcjonizm i równość w matematyce. *Dydaktyka Matematyki* **24**, 93-117, 2002.

[4] Z. Semadeni. Rola znaczenia w rozumowaniach matematycznych. *Dydaktyka Matematyki* **24**, 145-174, 2002.